Mi sono accorto che in B 3- B5 ci sono errori nel testo,tuttavia anche le vostre risposte errate come nel testo sono state considerata corretta, dato che si e' trattato di errore nel testo.

In questa versione sono riportate le risposte corrette

[ ]02-02-2021B

B1

1) Sia A una matrice reale $n \times n$, quali tra le seguenti affermazioni sono corrette ?
Se il numero complesso λ e' una radice del polinomio caratteristico P_A di A, allora λ e' un autovalore di A.
(per una matrice reale $n \times n$ quando si dice autovalore di A si intende autovalore dell'applicazione $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dove $L_A(X) = AX$).
2) Se il numero complesso λ e' un autovalore di A, allora esso e' una radice del polinomio caratteristico di A.
3) Se il numero complesso λ e' un autovalore di A con autospazio V_λ di dimensione $n > 0$ allora $P_A(x) = Q(x)(x-\lambda)^n$ dove Q e' un polinomio.
4) Se il numero reale λ e' tale che $P_A(x) = Q(x)(x-\lambda)^n$ dove Q e' un polinomio ed $n > 0$, allora λ e' autovalore di A e la dimensione dell'autospazio V_λ e' almeno n.

B2

Sia dato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare canonico, sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, una applicazione lineare e sia β una base di $\mathbb{R}^3$. Quali tra le seguenti affermazioni sono corrette ?

1) Se la matrice M_β^β associata ad L rispetto alla basi β in partenza e β in arrivo e' una matrice invertibile allora l'applicazione lineare L e' suriettiva.
2) Se L e' una applicazione lineare simmetrica la matrice M_β^β associata ad L rispetto alla basi β in partenza e β in arrivo e' una matrice simmetrica.
3) Se L e' una applicazione lineare simmetrica e β e' una base ortonormale la matrice M_β^β associata ad L rispetto alla basi β in partenza e β in arrivo e' una matrice simmetrica.
4) Se L e' una applicazione lineare simmetrica e se la matrice M_β^β associata ad L rispetto alla basi β in partenza e β in arrivo e' una matrice simmetrica, allora β e' una base ortonormale.

B3 Sia r la retta in $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x-z=5 \end{cases}$ e Π e' il piano di equazione parametrica $\begin{cases} x = t+2s+3 \\ y = 2t \\ z = -3t-s+5 \end{cases}$, quale delle seguenti affermazioni sono corrette ?

1) Il piano Π e' parallelo alla retta r
2) Il piano Π e' perpendicolare alla retta r
3) Il piano Π interseca la retta r
4) Nessuna delle affermazioni sopra e' vera

B4 Siano V e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, sia β_1 una base di V e sia β_2 una base di W e sia $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$, quali tra le seguenti affermazioni sono corrette ?

1) L'insieme β e' una base di $V + W$
2) L'insieme β e' un insieme di generatori di $V + W$
3) L'insieme β e' un insieme di vettori linearmente indipendenti
4) L'insieme β contiene almeno tanti elementi quant'e' la dimensione di $V + W$.

B5 Si consideri il sistema lineare $\begin{cases} k^2x - y - z = 1 \\ x - y - z = -k \end{cases}$ dipendente dal parametro reale k. Quali tra le seguenti affermazioni sono corrette ?

1) Il sistema e' sempre compatibile per qualunque valore di k,
2) esiste un solo valore del parametro tale che per k diverso da quel valore il sistema e' compatibile
3) esiste un numero finito maggiore di uno di valori del parametro k tali che per k diverso da quei valori il sistema e' compatibile
4) Per tutti i valori per i quali il sistema e' compatibile la dimensione dello spazio delle soluzioni e' 1.

SOLUZIONI Ogni risposta corretta vale 3 punti, ogni risposta sbagliata -3 punti ogni risposta non data 0 punti. In questo compito ci sono due risposte corrette e due sbagliate per ogni esercizio.

B1

Risposta 1 sbagliata (radici complesse non reali di P_A non sono autovalori della matrice reale A)
Risposta 2 giusta
Risposta 3 giusta
Risposta 4 sbagliata (se la molteplicita' algebrica n_1 di λ autovalore e' strettamente maggiore di n_2 molteplicita' geometrica allora $P_A = (x - \lambda)^{n_1}Q$ con Q polinomio ma $n_1 > n_2 = dimV_\lambda$.)

B2

Risposta 1 giusta
Risposta 2 sbagliata in generale per beta base qualunque
Risposta 3 giusta
Risposta 4 sbagliata
(L'applicazione identica e' lineare simmetrica e fissata una base beta qualunque, quindi anche non ortonormale, la matrice $M_\beta^\beta(Id)$ e' la matrice identica che e' diagonale quindi simmetrica

B3 La giacitura della retta e' generata del vettore $(1, 1, 2)$ che e' perpendicolare a $(2, 0, -1)$ ma non a $(1, 2, -3)$, quindi la retta e il piano non sono ortogonali, tuttavia non sono neppure paralleli , percio' si intersecano.

B 4 Risposta 2) OK, risposta 4) OK, risposta 1) e risposta 3) sbagliate. Se ad esempio V e' una retta per l'origine e W e' un piano per l'origine in $\mathbb{R}^3$, con $V \subseteq W$, $\{v_1\}$ e' una base di V e $\{v_2, v_3\}$ e' una base di W con v_1, v_2, v_3 tutti distinti allora $V + W = W$, $dim(W) = 2$, ma β e' costituita da tre vettori distinti quindi v_1, v_2, v_3 non sono linearmente indipendenti, percio' non sono base di $V + W$.

B 5 Se $k^2 \neq 1$ la matrice dei coefficienti ha rango 2 il sistema e' quindi compatibile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1, se $k = 1$, la matrice dei coefficienti ha rango 1 e la matrice completa rango 2, is sistema non e' quindi compatibile, ma se $k = -1$, sia la matrice completa che quella incompleta hanno rango 1, percio' il sistema per $k = -1$ e' compatibile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2.

Quindi l'unica risposta corretta e' che esiste un unico valore per il quale il sistema non e' compatibile.